

TERUGKOPPELING

Antwoorden en verwijzingen

Bij de antwoorden op de opgaven uit de voorkennistoets treft u een uitwerking en een verwijzing naar de cursus waarin de benodigde stof behandeld is. In het boek 'Fundamentals of the new artificial intelligence' wordt een groot deel van de wiskunde die nodig is, ook nog eens kort behandeld. Het is daarom niet erg wanneer u een enkele opgave niet kon maken. Als u van een paragraaf minder dan drie opgaven goed had, raden we u aan om uw kennis van dat deel van de wiskunde op te halen voordat u aan de cursus begint.

1 **Lineaire algebra**

1.1 antwoord c

$$(1, 2, 0, 4) \cdot (2, -3, 2, 2) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + 0 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 4$$

1.2 antwoord a

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \\ 7 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.3 antwoord b

$$(1 \ 2) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = (1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \quad 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \quad 1 \cdot 7 + 2 \cdot (-3)) = (5 \ 2 \ 1)$$

1.4 antwoord c

$$|(1, 2, -1)| = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}$$

1.5 antwoord b

De cosinus van de gevraagde hoek is gelijk aan

$$\frac{(1, 2, -1)(1, 1, 0)}{|(1, 2, -1)| |(1, 1, 0)|} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

de gevraagde hoek is dus gelijk aan $\pi/6$.

Verwijzingen

Vectoren, matrices, hun vermenigvuldiging en het inproduct zijn behandeld in Discrete wiskunde 2, blok 7 leereenheid 21 of in Discrete wiskunde B, leereenheid 20.

Definities van lengte en hoek vindt u in Lineaire algebra, leereenheid 2.

2 Verzamelingenleer

2.1 antwoorden b en d

Als $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ en $A = \{2, 3, 5\}$ en $B = \{5, 8, 9, 10\}$, dan geldt:

$$A \cup B = \{2, 3, 5, 8, 9, 10\}$$

$$A \cap B = \{5\}$$

$$A^c = \{1, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$A \times B = \{(2, 5), (2, 8), (2, 9), (2, 10), (3, 5), (3, 8), (3, 9), (3, 10), (5, 5), (5, 8), (5, 9), (5, 10)\}$$

2.2 antwoorden c en d

$R = \{(1, 2), (2, 6), (7, 10), (6, 10)\}$ bestaat uit paren (x, y) met de eigenschap dat er bij iedere x hoogstens één y -waarde bestaat: R is dus een functie. Het domein van R zijn de x -waarden $\{1, 2, 6, 7\}$ en het bereik de y -waarden $\{2, 6, 10\}$.

2.3 antwoorden b en d

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ is niet algemeen geldig. Voor de verzameling uit opgave 2.1 geldt $(A \cup B)^c = \{1, 4, 6, 7\}$ en $A^c \cap B^c = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ($= (A \cap B)^c$).

$A^{ccc} = A^c$, want $A^{cc} = A$ (dubbel complement).

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ is niet algemeen geldig. Neem bijvoorbeeld $C = \emptyset$ en A en B als in opgave 2.1, dan geldt $A \cup (B \cap C) = A$ en $(A \cup B) \cap C = \emptyset$.

$A \cup A = A \cap A$ is algemeen geldig, want $A \cup A = A$ en $A \cap A = A$ (idempotentie).

2.4 antwoorden b, c en d

De deelverzamelingen van een partitie zijn onderling disjunct en de vereniging van deze deelverzamelingen moet de hele verzameling opleveren.

De deelverzamelingen uit onderdeel a vormen geen partitie omdat 5 niet tot een van de deelverzamelingen behoort.

De deelverzamelingen uit onderdeel e vormen geen partitie omdat de doorsnede van bijvoorbeeld $\{1, 2, 4, 8\}$ en $\{1, 3, 9\}$ niet leeg is.

2.5 antwoord c

Een relatie is een equivalentierelatie als zij reflexief, symmetrisch en transitief is. De relatie uit onderdeel d is niet symmetrisch. De andere drie zijn een equivalentierelatie. Bij een equivalentierelatie hoort een partitie die gevormd wordt door de equivalentieklassen: twee elementen behoren tot dezelfde deelverzameling van de partitie precies dan wanneer tussen deze elementen de relatie geldt.

Verwijzingen

Operaties op verzamelingen en hun eigenschappen zijn behandeld in Discrete wiskunde 1 of A blok 3 leereenheid 6; relaties en functies in leereenheid 7. Equivalentierelaties en partities zijn behandeld in Discrete wiskunde 2 blok 6 leereenheid 18 of Discrete wiskunde B blok 6 leereenheid 17.

3 **Analyse**

3.1 antwoord a

de afgeleide van $1/(1 + e^{-x})$ is gelijk aan (denk aan de kettingregel!)

$$\begin{aligned} \frac{-1}{(1 + e^{-x})^2} (-e^{-x}) &= \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} = \frac{1 + e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} - \frac{1}{(1 + e^{-x})^2} \\ &= \frac{1}{1 + e^{-x}} \left(1 - \frac{1}{1 + e^{-x}}\right) \end{aligned}$$

3.2 antwoord a

$$f'(x) = 5a^2x^4 - 9bx^2$$

3.3 antwoord c

De tweedeorde Taylor-ontwikkeling van f rond $x = 0$ is gelijk aan

$$f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2.$$

In dit geval geldt:

$$\begin{aligned} f(0) &= t^c \\ f'(x) &= c(t-x)^{c-1} & \text{dus } f'(0) &= -ct^{c-1} \\ f''(x) &= c(c-1)(t-x)^{c-2} & \text{dus } f''(0) &= c(c-1)t^{c-2} \end{aligned}$$

De Taylor-ontwikkeling is dus gelijk aan

$$t^c - ct^{c-1}x + \frac{1}{2}c(c-1)t^{c-2}x^2$$

3.4 antwoord c

De integraal van een functie is gelijk aan de oppervlakte tussen de grafiek en de x -as wanneer de functie boven de x -as ligt; als de functie onder de x -as ligt, is de integraal gelijk aan het tegengestelde van de oppervlakte.

3.5 antwoord b

$$\sum_{k=1}^8 \left(\frac{1}{2}\right)^k = -1 + \sum_{k=0}^8 \left(\frac{1}{2}\right)^k = -1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^9}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{255}{256}$$

Verwijzingen

In de cursus Continue wiskunde 1 vindt u informatie over meetkundige reeksen (blok 2 leereenheid 7), differentiëren (blok 4 leereenheden 13 en 14), Taylor-benaderingen (blok 4 leereenheid 15) en het verband tussen integraal en oppervlakte (blok 5 leereenheid 17).

4 Combinatoriek en kansrekening

4.1 antwoord d

Om een permutatie van 5 elementen te maken, kunnen we voor het eerste element kiezen uit 5 mogelijkheden, het tweede uit 4, enzovoorts. In het totaal geeft dit $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ mogelijkheden.

4.2 antwoord d

De uitkomstenruimte bestaat uit 100 elementen. De gebeurtenis $15 \leq x \leq 24$ bestaat uit 10 elementen. Omdat de uitkomstenruimte symmetrisch is, is de kans gelijk aan $10/100 = 1/10$.

4.3 antwoord a

De gebeurtenissen zijn onafhankelijk, dus de kans is gelijk aan $1/10 \cdot 1/10 = 1/100$.

4.4 antwoord c

Deze kans is het complement van de kans uit onderdeel b, dus gelijk aan $1 - 1/10 = 9/10$.

4.5 antwoord b

$$E(X) = \frac{1}{100} (0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 99) = 49 \frac{1}{2}$$

Verwijzingen

Het begrip permutatie is behandeld in de cursus Discrete wiskunde 1 blok 4 leereenheid 9 of Discrete wiskunde B blok 5 leereenheid 13. Het begrip kans en de rekenregels voor het bepalen van kansen zijn behandeld in de cursus Discrete wiskunde 1 blok 4 leereenheid 10 of Discrete wiskunde B blok 5 leereenheid 14.

Het begrip verwachtingswaarde is behandeld in de cursus Discrete wiskunde 1 blok 4 leereenheid 11 of Discrete wiskunde B blok 5 leereenheid 15.